Rapport de Stage : Problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire - Différentes notions et constructions de solutions.

Florian LAVIGNE *

29 août 2014

Remerciements

Je tiens à remercier M. Rémi CARLES de m'avoir proposer ce stage. Il m'a permis d'accroître mes connaissances dans le monde des équations différentielles. Je le remercie de m'avoir conseillé sur les ouvrages, bases de cette étude, mais aussi de m'avoir aidé à compléter certaines démonstrations.

Il m'a permis de toucher du bout des doigts les différentes théories sur l'équation de Schrödinger, qu'il s'agisse de l'équation linéaire, avec l'utilisation de la transformée de Fourier, ou la non linéaire, ou encore le scattering.

Je remercie toute l'équipe d'ACSiOM de Montpellier de m'avoir accueilli, et de m'avoir laissé un bureau et l'accès à la bibliothèque de Mathématiques.

*florian.lavigne@ens-lyon.fr

Table des matières

Introduction

L'équation de Schrödinger, établie en 1925, traduit la propagation d'un rayon laser dans un milieu dont l'indice de réfraction dépend de l'amplitude d'onde. À partir de ce moment, de nombreux scientifiques se sont penchés sur la résolution de cette équation ou une approximation d'une telle solution. Nous verrons ici des méthodes pour établir la solution ou encore pour justifier simplement l'existence de celle-ci.

1 Espaces de Schwartz et de Sobolev

1.1 Espace de Schwartz

Rappel. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On note x^α le d-uplet : $(x_1^{\alpha_1}, ..., x_d^{\alpha_d})$.*

Déf. On appelle **espace de Schwartz** l'espace vectoriel suivant :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathscr{C}^\infty | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mid x^\alpha \partial^\beta u(x) \mid < \infty\}.$$

Exemple. $u(x) = e^{-|x|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Déf. On définit les semi-normes suivantes sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$||f||_{\alpha,\beta} = \sup_x \mid x^\alpha \partial^\beta f(x) \mid .$$

Remarque. On a clairement $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Déf. Soit $g_n \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$. On dit que g_n converge vers g dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ssi :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, ||g_n - g||_{\alpha,\beta} \to 0.$$

1.2 Transformée de Fourier

Déf. Si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ alors :

$$\mathscr{F}u(\xi) = \hat{\mathrm{u}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix.\xi} u(x) dx.$$

Rappel. *Soit $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\mathscr{F}u(\xi) = u(\xi)$.*

Remarque. En notant $D = \frac{1}{i}\partial$, on a pour P un polynôme :

$$\mathscr{F}(P(D)u)(\xi) = P(\xi) \times \mathscr{F}u(\xi).$$

Proposition 1.
- $\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \mathscr{F}u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
- *$u \mapsto \mathscr{F}u$ est continue de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.*

Remarque. Notons $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$ et $(\sigma_\lambda u)(x) = u(\lambda x)$. Dans ce cas on a :
- $\mathscr{F}(\tau_h u)(\xi) = e^{-ih\xi}\mathscr{F}u(\xi)$.
- $\mathscr{F}(e^{ihx}u) = \tau_h(\mathscr{F}u) = \mathscr{F}u(. - h)$.
- $\mathscr{F}(\sigma_\lambda u) = \frac{1}{|\lambda|^d}\left(\sigma_{\frac{1}{\lambda}}(\mathscr{F}u)\right) = \frac{1}{|\lambda|^d}\mathscr{F}u(\frac{\cdot}{\lambda})$.

Théorème 2. *Inversion de Fourier*

Pour $u \in \mathscr{S}$, *posons* $\mathscr{F}^* u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{+ix.\xi} u(x) dx$.

Dans ce cas, $\mathscr{F}^* \mathscr{F} u = u$.

Théorème 3. *Théorème de Plancherel*

$\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{F}^*$ *se prolongent sur* L^2 *dans lui-même, tel que* $\mathscr{F}\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^*\mathscr{F} = Id$.

Dans ce cas, on a : $||\mathscr{F}u||_{L^2} = ||u||_{L^2} = ||\mathscr{F}^* u||_{L^2}$.

1.3 Distributions tempérées

Déf. On appelle **distribution tempérée** une application continue et linéaire de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$. Leur espace est noté $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. Posons $\mathscr{E}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Comme $\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E}$, on a alors : $\mathscr{E}' \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$.

On a même : $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}' \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$.

Déf. Soit $T_n \in (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$. On dit que T_n converge vers T dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ ssi :

$$\forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \langle T_n, \phi \rangle \to \langle T, \phi \rangle.$$

Proposition 4. $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ *est séquentiellement dense dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *(donc* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *l'est aussi).*

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\phi(0) = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi\left(\frac{\cdot}{n}\right) T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$$

Soit $j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \int j = 1$, j paire.

Posons $j_n = n^d j(n \times .) \to \delta_0$ dans $\mathscr{S}'$.

Or $\phi\left(\frac{\cdot}{n}\right) T$ est à support compact donc :

$$T_n(x) = \left\{\phi\left(\frac{\cdot}{n}\right) T\right\} * j_n(x) = \langle \phi\left(\frac{\cdot}{n}\right) T, j_n(x - .)\rangle \in \mathscr{D} \subset \mathscr{S}.$$

Il suffit de montrer que $\forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \langle T_n, \psi \rangle \to \langle T, \psi \rangle$.

Or :

$$\langle T_n, \psi \rangle = \int \left[\left\{\phi\left(\frac{\cdot}{n}\right) T\right\} * j_n\right] .\psi = \langle T, \phi\left(\frac{\cdot}{n}\right) .(j_n * \psi)\rangle$$

Il faut donc montrer que : $\psi_n = \phi\left(\frac{\cdot}{n}\right) .(j_n * \psi) \to \psi$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Posons :

$$A_n(x) = \phi\left(\frac{x}{n}\right) [(j_n * \psi)(x) - \psi(x)] = \int \phi\left(\frac{x}{n}\right) \left\{\psi\left(x + \frac{y}{n}\right) - \psi(x)\right\} j(y) dy.$$

et

$$B_n(x) = \left\{\phi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right\} \psi(x).$$

On a donc $\psi_n - \psi = A_n + B_n$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, en appliquant $x^\alpha \partial_x^\beta$ à A_n, on obtient une somme finie dont les termes sont de la forme :

$$c(\alpha, \beta, \gamma) \int \frac{x^\alpha}{n^{|\gamma|}} \partial_x^\gamma \phi\left(\frac{x}{n}\right) \left\{\partial_x^{\beta-\gamma} \psi\left(x + \frac{y}{n}\right) - \partial_x^{\beta-\gamma} \psi(x)\right\} j(y) dy.$$

La différence des dérivées de ψ décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance de x par définition. D'où, par théorème des accroissements finis :

$$\mid \partial_x^{\beta-\gamma}\psi\left(x+\frac{y}{n}\right)-\partial_x^{\beta-\gamma}\psi(x)| \leq \left|\frac{y}{n}\right| c_M(1+\mid x\mid)^{-M}.$$

En choisissant $M > |\alpha|$ et en majorant par la borne de ψ, on a que $A_n \to 0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, car ϕ est à support compact.

De même, on obtient le même résultat par un raisonnement analogue pour B_n.

D'où le résultat cherché.

□

Déf. Si L est un opérateur linéaire continu de $\mathscr{S}$ dans lui-même, alors sa transposée est $L' : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ tel que $\langle L'T, \phi\rangle = \langle T, L\phi\rangle$.

Proposition 5. *Généralisation des opérateurs de $\mathscr{S}$ à $\mathscr{S}'$*

Si $L : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est un opérateur continu et linéaire, et si $L'_{|\mathscr{S}}$ continu de $\mathscr{S}$ dans lui-même, alors L s'étend de manière séquentiellement continue en :

$$L : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \text{ avec } \langle LT, \phi\rangle = \langle T, L'\phi\rangle.$$

Exemple. *Quelques opérateurs et leur transposée*

L	∂^α	τ_h	σ_k	$\mathscr{F}$
L'	$(-\partial)^\alpha$	τ_{-h}	$\frac{1}{k^d}\sigma_{1/k}$	$\mathscr{F}$

Démonstration. Nous allons démontrer la formule pour la transformée de Fourier. Les autres se démontrent de la même façon. Soit $T \in \mathscr{S}', \phi \in \mathscr{S}$.

$$\langle \mathscr{F}'T, \phi\rangle = \langle T, \mathscr{F}\phi\rangle.$$

Si $T \in \mathscr{S}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}'T, \phi\rangle &= \int_x \frac{T(x)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_y e^{-iy.x}\phi(y)dydx \\ &= \int_y \phi(y)\int_x \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{-iy.x}T(x)dxdy \\ &= \langle \mathscr{F}T, \phi\rangle\end{aligned}$$

□

Proposition 6. *Transformée de Fourier*

- $\mathscr{F}D^\alpha T = \xi^\alpha \mathscr{F}T.$
- $\mathscr{F}^*\mathscr{F}T = T.$
- $\mathscr{F}(\tau_h T) = e^{ih\xi}\mathscr{F}T.$

Exemple. *Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $Re(a) \geq 0$.*

Posons $T_a(x) = e^{-a\frac{x^2}{2}}$. Soit $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

$a \mapsto \langle T_a, \psi\rangle$ est holomorphe en a dans $\{a|Re(a) > 0\}$ et continue sur $\{a|Re(a) \geq 0\}$.

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors : $\mathscr{F}T_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a^d}}e^{-\frac{x^2}{2a}}$.

Ces deux fonctions sont holomorphes sur $\{a|Re(a) > 0\}$, continues sur $\{a \neq 0|Re(a) \geq 0\}$ et égales sur $\mathbb{R}_+^*$. Par principe de prolongement analytique, on a $\forall a \neq 0, Re(a) \geq 0$,

$\mathscr{F}T_a(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^d}}e^{-\frac{x^2}{2a}}$, avec la racine définie en enlevant la demi-droite des réels négatifs.

Par continuité on obtient alors :

$$\forall a \neq 0, Re(a) \geq 0, \mathscr{F}T_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a^d}} e^{-\frac{x^2}{2a}}.$$

Exemple. *Calcul de $\mathscr{F}1$ (cas limite où $a = 0$).*

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}1, \phi \rangle = \langle 1, \mathscr{F}\phi \rangle &= \int \mathscr{F}\phi(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \phi(0) \text{ par inversion de Fourier} \\ &= \langle (2\pi)^{\frac{d}{2}} \delta_0, \phi \rangle\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{F}1 = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \delta_0$.

1.4 Espaces de Sobolev

Déf. On appelle **espace de Sobolev d'ordre s** avec $s \in \mathbb{R}$ l'espace :

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) | \langle \xi \rangle^s \mathscr{F}u \in L^2 \right\} \text{avec} \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Une norme est donnée par : $\|u\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s \mathscr{F}u\|_{L^2}$.

Remarque. $\forall -\infty < s < t < +\infty, \mathscr{S} \subset H^t \subset H^s \subset \mathscr{S}'$. Chaque inclusion est même séquentiellement continue.

Remarque. On a donc par ces inclusions la densité de $\mathscr{S}$ dans $H^s, \forall s \in \mathbb{R}$.

Proposition 7. *Si $s > d/2$ alors H^s est une algèbre.*

Démonstration. Soit $u, v \in H^s$.

$$\begin{aligned}|\widehat{uv}(\xi)| &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} |\hat{u} * \hat{v}(\xi)| d\xi \\ &\leq c \int \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} . \frac{\hat{g}(\xi - \eta)}{\langle \xi - \eta \rangle^s} \right| d\eta \text{ avec } \hat{f} = \hat{u} \langle \xi \rangle^s \text{ et } \hat{g} = \hat{v} \langle \xi \rangle^s \in L^2 \\ &\leq c \left[\int_{|\eta| \leq \frac{\xi}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} . \frac{\hat{g}(\xi - \eta)}{\langle \xi - \eta \rangle^s} \right| d\eta + \int_{|\eta| > \frac{\xi}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} . \frac{\hat{g}(\xi - \eta)}{\langle \xi - \eta \rangle^s} \right| d\eta \right] \\ &\leq c \left[\int_{|\eta| \leq \frac{\xi}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} . \frac{\hat{g}(\xi - \eta)}{\langle \xi/2 \rangle^s} \right| d\eta + \int_{|\eta| > \frac{\xi}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \xi/2 \rangle^s} . \frac{\hat{g}(\xi - \eta)}{\langle \xi - \eta \rangle^s} \right| d\eta \right] \\ &\leq K \left[\int_{|\eta| \leq \frac{\xi}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} . \frac{\hat{g}(\xi - \eta)}{\langle \xi \rangle^s} \right| d\eta + \int_{|\eta| > \frac{\xi}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \xi \rangle^s} . \frac{\hat{g}(\xi - \eta)}{\langle \xi - \eta \rangle^s} \right| d\eta \right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|uv\|_{H^s} &= \|\langle . \rangle^s \widehat{uv}\|_{L^2} \\
&\leq K\left(\left\| \frac{|\hat{f}|}{\langle . \rangle^s} * |\hat{g}| \right\|_{L^2} + \left\| \frac{|\hat{g}|}{\langle . \rangle^s} * |\hat{f}| \right\|_{L^2} \right) \\
&\leq K\left(\left\| \frac{|\hat{f}|}{\langle . \rangle^s} \right\|_{L^1} \|\hat{g}\|_{L^2} + \left\| \frac{|\hat{g}|}{\langle . \rangle^s} \right\|_{L^1} \|\hat{f}\|_{L^2} \right) \text{ par inégalité de Young} \\
&\leq 2K\|\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{g}\|_{L^2}\|\frac{1}{\langle . \rangle^s}\|_{L^2} \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq 2K\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \left\| \frac{1}{\langle . \rangle^s} \right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

Comme $s > d/2$, la dernière norme est finie. D'où le résultat.

□

2 Équation de Schrödinger linéaire

L'équation de Schrödinger linéaire est de la forme suivante :

$$a.\Delta\psi + ib\frac{\partial\psi}{\partial t} = F.$$

Le but de cette partie va être de trouver des solutions à cette équation, et à d'autres qui en découlent.

Pour simplifier les calculs nous étudierons le cas où $a = b = 1$.

Remarque. Les transformées de Fourier dans cette partie sont considérées par rapport à l'espace, et non par rapport au temps.

2.1 Solution homogène

Théorème 8. *Existence et unicité*

$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \exists! u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \mathbb{R}) | u_t = i\Delta u$ et $u(0, .) = f$. De plus : $\forall t, u(t, .) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et la solution est donnée par la formule :

$$u(t, x) = \mathscr{F}^*\left(e^{-it|\xi|^2}\mathscr{F}f\right)(x).$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
u \text{ est solution } &\iff u_t = i\Delta u \text{ et } u(0, .) = f \\
&\iff \mathscr{F}(u_t - i\Delta u) = 0 \text{ et } \mathscr{F}u(0, .) = \mathscr{F}f \\
&\iff (\mathscr{F}u)_t + i \mid \xi \mid^2 \mathscr{F}u = 0 \text{ et } \mathscr{F}u(0, .) = \mathscr{F}f \\
&\iff \partial_t\left(e^{it|\xi|^2}\mathscr{F}u\right) = 0 \text{ et } \mathscr{F}u(0, .) = \mathscr{F}f \\
&\iff e^{it|\xi|^2}\mathscr{F}u = \mathscr{F}f \\
&\iff u(t, x) = \mathscr{F}^*\left(e^{-it|\xi|^2}\mathscr{F}f\right)(x)
\end{aligned}
$$

Les propriétés $u \in \mathscr{C}^\infty$ et $u(t, .) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ découlent de la formule.

□

Déf. On définit l'opérateur $S(t) : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ par $S(t)(f) = u(t,.)$ où u est la solution de l'équation de Schrödinger homogène avec f comme condition initiale. Cette opérateur est appelé **propagateur**. Il est linéaire et séquentiellement continu.

Proposition 9. *Propriétés du propagateur*
1. $S(t)(\partial_x^\alpha f) = \partial_x^\alpha(S(t)f)$.
2. $\mathscr{F}(S(t)f) = e^{-it|\xi|^2}\mathscr{F}f$.
3. $S(t_1+t_2)(f) = S(t_1)(S(t_2)(f))$.
4. $\forall s, t \in \mathbb{R}, f \in \mathscr{S}, \|S(t)f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}$.

Proposition 10. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $S(t)$ s'étend de façon unique en une application unitaire de H^s dans lui-même. Le nouvel opérateur ainsi défini vérifie :*

$$\mathscr{F}(S(t)f) = e^{-it|\xi|^2}\mathscr{F}f.$$

Théorème 11. $\forall s \in \mathbb{R}, f \in H^s(\mathbb{R}^d), \exists! u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \mathbb{R}) | u_t = i\Delta u$ *et* $u(0,.) = f$. *De plus la solution, appelée solution généralisée, est donnée par la formule :*

$$u(t,x) = \mathscr{F}^*\left(e^{-it|\xi|^2}\mathscr{F}f\right)(x).$$

Remarque. $u(t,x) = (4\pi it)^{-d/2}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}}f(y)dy$. En effet :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (2\pi)^{-d/2}\int_\xi e^{ix\xi}e^{-i|\xi|^2t}(2\pi)^{-d/2}\int_s e^{is\xi}f(s)dsd\xi \\ &= (2\pi)^{-d/2}\int_s \mathscr{F}(e^{i|\xi|^2t})(s-x)f(s)ds \end{aligned}$$

D'où le résultat, par le calcul fait en partie 1.3.

2.2 Équation non-homogène

On souhaite étudier la solution de : $\partial_t u - i\Delta u = F$.

Théorème 12. *Existence et Unicité*

$\forall F \in \mathscr{C}^\infty([0,\infty[: \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)), \exists! u \in \mathscr{C}^\infty([0,\infty[: \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ *tel que*

$$(\partial_t - i\Delta)u = F \text{ et } u_{|t=0} = 0.$$

La solution est donnée par ***la formule de Duhamel*** *:*

$$u(t,x) = \int_0^t S(t-s)F(s)(x)ds.$$

Théorème 13. *Existence et Unicité - Généralisation*

$\forall s \in \mathbb{R}, F \in L^1_{Loc}([0,\infty[: H^s), \exists! u \in \mathscr{C}([0,\infty[: H^s)$ *solution de l'équation de Schrödinger non homogène associée avec condition initiale nulle. La solution satisfait :*

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \int_0^t \|F(\sigma)\|_{H^s}d\sigma.$$

Démonstration. On choisit $F_n \in C^\infty([0,\infty[: \mathscr{S})^{\mathbb{N}}$ tel que $F_n \to F$ dans L^1_{Loc}. Posons u_n la solution associée à F_n.

$$\|u_n(t)\|_{H^s} \leq \int_0^t \|S(t-\sigma)F_n(\sigma)\|_{H^s} d\sigma \leq \int_0^t \|F_n(\sigma)\|_{H^s} d\sigma.$$

De là on obtient que u_n est de Cauchy dans $\mathscr{C}([0,\infty[: H^s)$. Soit u sa limite.

Soit $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a $\langle u_n, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$ dans L^1_{Loc}. Or :

$$\frac{d}{dt}\langle u_n, \phi\rangle = \langle u_n, i\Delta\phi\rangle + \langle F_n(t), \phi\rangle \to \langle u, i\Delta\phi\rangle + \langle F(t), \phi\rangle,$$

dans L^1_{Loc}. D'où u est solution, et u vérifie bien l'inégalité.

L'unicité découle directement de l'unicité de la solution homogène. □

2.3 Cas particulier : $\partial_t u - i\Delta u = V(t)u$

Dans ce cas, on pose $w(t,x) = u(t,x)e^{\theta(t)}$.

On a alors $\partial_t w = (\partial_t u + \theta' u)e^\theta$ et $\Delta w = \Delta u e^\theta$. D'où :

$$\begin{aligned}\partial_t w - i\Delta w &= (\partial_t u - i\Delta u)e^\theta + \theta' u e^\theta \\ &= (V + \theta')w\end{aligned}$$

Si on pose $\theta(t) = -\int_0^t V(s)ds$, alors w est solution d'une équation de Schrödinger homogène. On peut donc en déduire la solution du problème initial.

2.4 Comportement à l'infini

Théorème 14. *Asymptote à l'infini*

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $u(t) = S(t)f$. Posons $A(t)f = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4it}}}{(2it)^{d/2}}\hat{f}\left(\frac{x}{2t}\right)$.

Alors $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|u(t) - A(t)f\|_{L^2} = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\|A(t)f\|_{L^2}^2 = \int |A(t)f|^2 &= \frac{1}{(2t)^d}\int \left|\hat{f}\left(\frac{x}{2t}\right)\right|^2 \\ &= \|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

D'où : $\|A(t)\| = 1, \forall t \neq 0$.

Soit $f \in L^2$ et $\epsilon > 0$. Soit $g \in \mathscr{C}_c^\infty$ avec $\|f - g\|_{L^2} < \epsilon$ et I ce compact.

$$A(t)g = S(t)\left(e^{\frac{|y|^2}{4it}}g\right) = S(t)g + S(t)\left[\left(e^{\frac{|y|^2}{4it}} - 1\right)g\right].$$

Or $\left\|\left(e^{\frac{|y|^2}{4it}} - 1\right)g\right\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^\infty}\|\sin\left(\frac{|y|^2}{8t}\right)\|_{L^2(I)} = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$.

D'où :

$$\begin{aligned}\|A(t)f - S(t)f\|_{L^2} &\leq \|A(t)g - S(t)g\| + \|S(t)(f-g)\| + \|A(t)(f-g)\| \\ &\leq O\left(\frac{1}{|t|}\right) + 2\epsilon\end{aligned}$$

Enfin $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}\|A(t)f - S(t)f\|_{L^2} = 0$. □

2.5 Estimation de Strichartz

Déf. On dit que le couple (q, r) est admissible (dans $\mathbb{R}^d$) si :
(i) $\frac{2}{q} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$.
(ii) $2 \leq r \leq \frac{2d}{d-2}$ (si $d = 1$, $2 \leq r \leq \infty$ et si $d = 2$, $2 \leq r < \infty$).

Déf. Soit $p \geq 1$. On note p' l'entité qui vérifie :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Théorème 15. *Estimation de Strichartz (admise)*
$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la fonction $t \mapsto S(t)\phi \in L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d)) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$ pour tout couple admissible (q, r). De plus il existe une constante C, ne dépendant que de q et de d tel que :

$$\|S(.)\phi\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C\|\phi\|_{L^2}, \forall \phi \in L^2.$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non), $J = \overline{I}$, et $t_0 \in J$. Si (γ, ρ) est admissible, et $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d))$ alors pour tout couple admissible (q, r), la fonction

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_{t_0}^{t} S(t-s)f(s)ds$$

pour $t \in I$ appartient à $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^d)) \cap \mathscr{C}(J, L^2(\mathbb{R}^d))$. De plus, il existe une constante C indépendante de I, mais dépendante de γ, q et d tel que :

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I, L^r)} \leq C\|f\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})}.$$

Remarque. On peut généraliser ce résultat par le théorème suivant.

Théorème 16. *Généralisation (admise)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $J = \overline{I}$. Soit $t_0 \in J$, et on considère la même application Φ que précédemment.
Soit $2 < r < \frac{2d}{d-2}$ (si $d = 1$, $r \leq \infty$),et $1 < a, \tilde{a} < \infty$ tel que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\tilde{a}} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right).$$

Alors $\forall f \in L^{\tilde{a}'}(I, L^{r'}), \Phi_f \in L^a(I, L^r)$ et il existe C indépendant de I tel que

$$\|\Phi_f\|_{L^a(I, L^r)} \ \leq \ C \ \|f\|_{L^{\tilde{a}'}(I, L^{r'})}.$$

3 Équation de Schrödinger non linéaire

Dans cette partie, nous allons travailler sur les équations de la forme :

$$\partial_t u - i\Delta u = F(u); u(0, .) = f.$$

Remarque. Ici nous ne pouvons pas utiliser la transformée de Fourier, car nous ne saurions pas comment simplifier $\widehat{F(u)}$.

3.1 Cas où $F(z) = \lambda \bar{z}^a z^b, \lambda \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{N}, a+b \geq 2$

Lemme. *Supposons $f \in H^s$, avec $s > d/2$. Alors il existe τ ne dépendant que de $\|f\|_{H^s}$ tel qu'il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}([0,\tau] : H^s)$ au problème étudié.*

Démonstration. Posons : $\Phi(u)(t,x) = S(t)(f)(x) + \int_0^t S(t-y)F(u(y,x))dy$.

1. Existence

Comme f puis $u(t) \in H^s$, on a bien $\Phi(u)(t) \in H^s$. Soit $0 \leq t \leq \tau$.
Pour tout τ on pose l'espace métrique

$$X(\tau) = \{u \in \mathscr{C}([0;\tau] : H^s) | \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t,x))\|_{H^s} \leq 2\|f\|_{H^s}\}$$

$$et$$

$$\|u\|_{X(\tau)} = \|u\|_\tau = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t,x))\|_{H^s}.$$

Soit $u \in X(\tau)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{H^s} &\leq \|f\|_{H^s} + \int_0^t \|S(t-y)F(u(y,x))\|_{H^s} dy \\
&\leq \|f\|_{H^s} + \int_0^t \|F(u(y,x))\|_{H^s} dy \\
&\leq \|f\|_{H^s} + C \int_0^t \|u(y,x)\|_{H^s}^{a+b} dy \text{ car } H^s \text{ est une algèbre} \\
&\leq \|f\|_{H^s} + C\tau \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t,x))\|_{H^s}^{a+b} \\
&\leq \|f\|_{H^s} + C\tau \|u(t,x))\|_\tau^{a+b} \\
&\leq \|f\|_{H^s} + C\tau (2\|f\|_{H^s})^{a+b}
\end{aligned}$$

Donc il existe τ_0 tel que pour tout $\tau \leq \tau_0, \Phi(u) \in X(\tau)$. Soit un tel τ et $u, w \in X(\tau)$.
On a :

$$\begin{aligned}
||F(u) - F(w)||_{H^s} &\leq \left\| \int_0^1 DF_{tu+(1-t)w}(u-w)dt \right\|_{H^s} \\
&\leq ||u-w||_{H^s}.c\left(||u^{a+b-1}||_{H^s} + ||w^{a+b-1}||_{H^s}\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u) - \Phi(w)\|_{H^s} &\leq \int_0^t \|F(u(y)) - F(w(y))\| dy \\
&\leq \int_0^t (\|u^{a+b-1}(y)\|_{H^s} + \|v^{a+b-1}(y)\|_{H^s})(\|u(y) - w(y)\|_{H^s}) \\
&\leq 2C \int_0^t (2\|f\|_{H^s})^{a+b-1} \|u(y) - w(y)\|_{H^s} dy \\
&\leq 2C(2\|f\|_{H^s})^{a+b-1} \tau \|u - w\|_\tau \\
&\leq K\tau \|u - w\|_\tau
\end{aligned}$$

Si $\tau < \frac{1}{K}$, dans ce cas Φ est une contraction de $X(\tau)$ dans lui-même.
D'où l'existence.

2. Unicité
   Soit u et v deux solutions de l'équation, définies sur $[0, \tau]$.
   Alors il existe R tel que $\|u\|_\tau < R$ et $\|v\|_\tau < R$.
   Posons $X_R(\tau) = \left\{ u \in \mathscr{C}([0,\tau]; H^s) \text{ tel que } \sup\limits_{0\leq t\leq\tau} \|u(t,.)\|_{H^s} \leq R \right\}$, qui est un espace métrique de même norme que précédemment.
   Par les mêmes calculs, on peut supposer que $\Phi(X_R(\tau)) \subset X_R(\tau)$, quitte à diminuer la valeur de τ en τ_0 (ne dépendant que de R).
   On obtient de même :
   $$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{H^s} \leq k\tau_0 \|u - v\|_{\tau_0}.$$
   Quitte à encore réduire, on a donc encore une contraction, puis l'unicité du point fixe.
   Donc $u = v$ sur $[0; \tau_0]$. Puis en réitérant un nombre fini de fois (de l'ordre de grandeur τ/τ_0), on obtient l'unicité sur $[0; \tau]$.

$\square$

Théorème 17. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $f \in H^s$. Alors il existe une unique solution maximale $u \in \mathscr{C}([0, T[: H^s)$ à :*

$$\partial_t u - i\Delta u = F(u)$$
$$u(0, .) = f$$

Si $T < +\infty$, alors $\lim\limits_{t\to T^-} \|u(t)\|_{H^s} = +\infty$.

Démonstration. Posons E l'ensemble des intervalles J contenant 0 tel que l'équation différentielle considérée a une solution $u \in \mathscr{C}(J : H^s)$.

Soit $I = \bigcup\limits_{J\in E} J \cap \mathbb{R}_+$.

Donc I, intervalle d'existence d'une solution maximale, est de la forme $[0, T[$.

Supposons $T < \infty$. S'il existe $t_n \to T^-$ et R tel que$\|u(t_n)\|_{H^s} \leq R$, le lemme nous donne $u \in ([t_n, t_n + \tau] : H^s)$ où τ ne dépend pas de n mais de R.

Pour n grand, on a $t_n + \tau > T$, ce qui est contradictoire. Donc :

$$\lim_{t\to T^-} \|u(t)\|_{H^s} = +\infty.$$

$\square$

Remarque. On ne peut pas savoir en général si $T = +\infty$ ou si $T < \infty$.

Exemple. $\partial_t u - \frac{i}{2}\partial_x^2 u = -i\lambda|u|^{2\sigma}u; u(0, .) = u_0$ *avec* $\lambda, \sigma > 0$.

Nous avons deux lois de conservations :

1. *Conservation de la charge.*
   On multiplie par $\bar{u}$, puis on intègre l'équation par rapport à x.

$$i\bar{u}\partial_t u + \frac{1}{2}\bar{u}\partial_x^2 u = \lambda|u|^{2\sigma+2}$$
$$i\int \bar{u}\partial_t u dx + \frac{1}{2}\int \bar{u}\partial_x^2 u dx = \lambda \int |u|^{2\sigma+2} dx$$
$$i\int \bar{u}\partial_t u - \frac{1}{2}\int \partial_x\bar{u}\partial_x u = \lambda \int |u|^{2\sigma+2}$$
$$i\int \bar{u}\partial_t u - \frac{1}{2}\int \overline{\partial_x u}\partial_x u = \lambda \int |u|^{2\sigma+2}$$

On prend la partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
\Im i \int \bar{u}\partial_t u &= 0 \\
\Re \int \bar{u}\partial_t u &= 0 \\
\int (\overline{u}\partial_t u + u\partial_t \overline{u})dx &= 0 \\
\int \partial_t(\overline{u}u)dx &= 0 \\
\partial_t \|u(t)\|_{L^2}^2 &= 0 \\
\|u(t)\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

2. *Conservation de l'énergie.*
On multiplie par $\partial_t \bar{u}$, puis on intègre l'équation par rapport à x.

$$\begin{aligned}
i\partial_t \bar{u}\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_t \bar{u}\partial_x^2 u &= \lambda |u|^{2\sigma} u \partial_t \bar{u} \\
i \int |\partial_t u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int \partial_t \bar{u}\partial_x^2 u dx &= \lambda \int |u|^{2\sigma} u \partial_t \bar{u} dx
\end{aligned}$$

On prend la partie réelle.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Re \int \partial_t \bar{u}\partial_x^2 u &= \lambda \Re \int |u|^{2\sigma} u\partial_t \bar{u} \\
-\frac{1}{2}\Re \int \partial_t \partial_x \bar{u}\partial_x u &= \lambda \Re \int |u|^{2\sigma} u\partial_t \bar{u} \\
-\frac{1}{4}\int \partial_t(|\partial_x u|^2) &= \lambda \int |u|^{2\sigma} \Re(u\partial_t \bar{u}) \\
-\frac{1}{4}\int \partial_t(|\partial_x u|^2) &= \frac{\lambda}{2}\int |u|^{2\sigma} \partial_t(|u|^2) \\
\frac{1}{2}\partial_t \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\partial_t \|u\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} &= 0 \\
E(t) = \frac{1}{2}\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} &= cste
\end{aligned}$$

De là on obtient que $\|u(t)\|_{H^1}$ est bornée. Donc $u \in \mathscr{C}(\mathbb{R} : H^1)$.

Exemple. $i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = -|u|^4 u$

On choisit la condition initiale suivante :

$$u(0,.) = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\cosh(2x\sqrt{2})}} e^{-i\frac{x^2}{2}} = Q(x)e^{-i\frac{x^2}{2}}.$$

On a que Q est la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}Q'' + Q^5 + Q = 0.$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}}.$$

Ici u est définie sur $]-\infty; 1[$.

3.2 Cas sous-critique L^2 : $F(z) = \lambda|z|^{2\sigma}z$ avec $\sigma < \frac{2}{d}$

Théorème 18. *Supposons $f \in L^2$. On pose $r = 2\sigma + 2$, et (q, r) le couple admissible. Alors il existe T ne dépendant que de $\|f\|_{L^2}$ tel qu'il existe une unique solution au problème étudié :*

$$u \in \mathscr{C}\ ([0,\tau]\ :\ L^2)\ \cap\ L^q\ ([0,\tau]\ :\ L^r).$$

Démonstration. Soit Φ définie comme précédemment sur L^2.

1. Existence
   Comme f et u sont dans L^2, on a bien $\Phi(u) \in L^2$.
   Soit $0 \leq t \leq T$. On a : $q = \frac{4\sigma+4}{d\sigma}$.
   De plus :
   $$r' = \frac{r}{2\sigma+1} \text{ et } \frac{1}{q'} = \frac{4\sigma+4-d\sigma}{4\sigma+4} = \frac{1}{q} + \frac{2\sigma}{\theta}, \text{ avec } \theta = \frac{2\sigma(2\sigma+2)}{2\sigma+2-d\sigma}$$
   Or : $\theta = \frac{d\sigma^2}{2\sigma+2-d\sigma}q$.
   On sait que $dX^2 - 2X - 2 + dX = d(X+1)(X - \frac{2}{d})$. Comme $\sigma < \frac{2}{d}$, $\theta < q$.
   Pour tout T, on pose l'espace métrique (où $M \in \mathbb{R}$)
   $$Y(T, M) = \{u \in \mathscr{C}([0,T] : L^2) | \|u\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \|u\|_{L^q([0,T],L^r)} \leq M\}.$$
   La norme associée est :
   $$\|u\|_T = \|u\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \|u\|_{L^q([0,T],L^r)}$$
   Soit $u \in Y(T, M)$.
   $$\|\Phi(u)\|_T \leq C\|f\|_{L^2} + C\|F(u)\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})}, \text{ par les inégalités de Strichartz}$$
   Or $\||u|^{2\sigma}u\|_{L^{r'}} = \|u\|_{L^r}^{2\sigma+1}$.
   D'où par l'inégalité d'Hölder :
   $$\begin{aligned}\| \, \|u\|_{L^r}^{2\sigma+1}\|_{L^{q'}} &\leq \|u\|_{L^q([0,T],L^r)}\|u^{2\sigma}\|_{L^{\frac{\theta}{2\sigma}}([0,T],L^r)} \leq \|u\|_{L^q([0,T],L^r)}\|u\|_{L^\theta([0,T],L^r)}^{2\sigma} \\ &\leq \|u\|_{L^q([0,T],L^r)} \left(\|1\|_{L^\omega([0,T])}\|u\|_{L^q([0,T],L^r)}\right)^{2\sigma} \text{ avec } \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{q} \\ \|\Phi(u)\|_T &\leq C\|f\|_{L^2} + M^{2\sigma+1}T^{\frac{2\sigma}{\omega}}.\end{aligned}$$
   Avec T assez petit, on a $\Phi(Y(T, M)) \subset Y(T, M)$.
   Soit $u, w \in Y(T, M)$ avec M et T choisis précédemment. On remarque que $F'(z) = (\sigma+1)\|z\|^{2\sigma}$.
   $$\begin{aligned}\|\Phi(u) - \Phi(w)\|_T &\leq C\|F(u) - F(w)\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})} \\ &\leq C\|(|u|^{2\sigma} + |w|^{2\sigma})|u - w|\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})} \\ &\leq C\|u - w\|_{L^q([0,T],L^r)} \left(\|u\|_{L^\theta([0,T],L^r)}^{2\sigma} + \|w\|_{L^\theta([0,T],L^r)}^{2\sigma}\right) \\ &\leq CT^{\frac{2\sigma}{\theta}}\left(C\|f\|_{L^2}\right)^{2\sigma}\|u - w\|_{L^q([0,T],L^r)}\end{aligned}$$
   Quitte à réduire T, on obtient que Φ est une contraction, et donc admet un unique point fixe sur $Y(T, M)$.
2. Unicité
   Par un raisonnement similaire à celui pour le cas H^s, on arrive à l'unicité de la solution à T donné.

$\square$

3.3 Explosion en temps fini

On va étudier l'équation : $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda|u|^{2\sigma}u; u(0,.) = u_0$.

On pose dorénavant : $E(u)(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$. Par la loi de conservation vue précédemment (qu'on peut généraliser au cas $\mathbb{R}^d$), on a $E(u)(t) = E(u)(0) = E(u)$.

Théorème 19. *Supposons $\lambda < 0$ et $\sigma \geq \frac{2}{d}$. Si $u_0 \in H^1$ avec $x \to |x|u_0(x) \in L^2$ et $E(u_0) < 0$. Alors l'équation de Schrödinger n'a pas de solution globale $u \in C(\mathbb{R}_+ : H^1)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons l'existence d'une telle solution.

Soit $T > 0$. Posons $y(t) = \int |x|^2.|u(t,x)|^2.dx$. Alors $y \in \mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}_+)$ (résultat admis) et $y'(t) = 2\Im \int \overline{u}(t,x).x.\nabla u(t,x).dx$.

On a de plus $y \in \mathscr{C}^2([0,T])$ avec :

$$y''(t) = 2\int |\nabla u(t,x)|^2 dx + \frac{2\lambda d\sigma}{\sigma+1}\int |u(t,x)|^{2\sigma+2}dx.$$

D'où : $y''(t) = 4E + 2\lambda\frac{d\sigma-2}{\sigma+1}\int |u(t,x)|^{2\sigma+2}dx$.

Or $\sigma \geq 2/d$ et $\lambda < 0$. Donc $y''(t) \leq 4E$.

D'où $y(t) \leq 2Et^2 + y'(0)t + y(0)$.

Or pour $t >> 1$, on aurait $y(t) \leq 0$ ce qui est impossible.

Donc $u \notin \mathscr{C}(\mathbb{R}_+ : H^1)$.

□

Références

[1] Rémi Carles, *Notes de cours de M2*[1].

[2] Thierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. 10 (New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003).

[3] Thierry Cazenave & Alain Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Mathématiques et Applications, Vol 1 (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles).

[4] Jeffrey Rauch, *Partial Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics (Springer).

[5] Catherine & Pierre-Louis Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation, Self-Focusing and Wave Collapse*, Applied Sciences, Vol. 139 (Springer).

1. `http://carles.perso.math.cnrs.fr/`